



## 평균의 이해

정준혁

## 시작하기 전에 - 조건부 확률

1. 주사위를 한 번 굴러 나온 눈을 조사하자. 다음 각 사건이 발생할 확률은?

사건	설명
$A$	나온 눈이 홀수다.
$B$	나온 눈이 3의 배수다.
$A \cap B$	나온 눈이 홀수이고, 3의 배수다.

$$\mathbb{P}(A) =$$

$$\mathbb{P}(B) =$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) =$$

2. 나온 눈이 홀수라는 것을 알았을 때, 그 값이 3의 배수이기도 할 확률은?

$$\mathbb{P}(B|A) =$$

3. 위의 결과를 바탕으로,  $\mathbb{P}(A) > 0$ 일 때, 다음 수식의 의미를 이해해보자.

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \quad (\text{조건부 확률의 정의})$$

4. 일반적으로  $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ 일 때, 다음 수식이 성립하는 것을 증명해보자.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B|A^c) \quad (\text{전체 확률의 법칙})$$

전체 확률의 법칙의 증명)

5. 위의 수식은 굳이 증명하지 않더라도, 실생활의 경험을 통해 직관적으로 받아들일 수 있을 것이다. 전체 확률의 법칙이 적용되는 실생활의 예시를 떠올려보자.

## 시작하기 전에 - 평균

1. 다음 상자에 들어 있는 수 8개의 평균을 구해보자.

	1			
	1	2		
0	1	2	3	4

계산)

2. 위의 상자에서 수 1개를 무작위로 꺼낸 결과를  $X$ 라고 할 때,  $\mathbb{P}(X=1)$ 의 값은?

$$\mathbb{P}(X=1) =$$

3. 일반적으로 **확률변수**  $X$ 가 음 아닌 정수값만을 가진다고 할 때, 다음 수식의 의미를 이해해보자.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\mathbb{P}(X=x) \quad (\text{평균의 정의})$$

4. 사건  $A$ 가  $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ 을 만족한다고 할 때, 다음 수식이 성립하도록 적절하게  $\mathbb{E}(X|A)$ 를 정의해보자. 실제로 다음 수식이 성립하는 것을 증명해보자.

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(A)\mathbb{E}(X|A) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{E}(X|A^c) \quad (\text{전체 평균의 법칙})$$

$$\mathbb{E}(X|A) = \quad (\text{조건부 평균의 정의})$$

전체 평균의 법칙의 증명)

5. 전체 평균의 법칙이 적용되는 실생활의 예시를 떠올려보자.

## 가. 우산 찾기 문제

1. 비가 많이 오는 어느 날, 20명의 초등학생들이 각자의 우산을 가지고 아주대학교 원천관 강당에 들어선다. 학생들은 순차적으로 한 명씩 집에 간다. 집에 가는 순서에 따라 1번부터 20번까지 번호를 부여하자.

1번 학생은 자기 우산을 기억하지 못해서 아무 우산이나 들고 집에 간다.

$k > 1$ 일 때,  $k$ 번 학생은 자기 우산을 찾으려고 한다.

만약 자기 우산이 남아 있으면, 자기 우산을 들고 집에 간다.

만약 자기 우산이 없으면, 아무 우산이나 들고 집에 간다.

마지막 20번 학생이 자기 우산을 들고 집에 갈 확률은?

풀이)

## 나. 동전 던지기 문제

1. 준혁이의 친구들은 아주대학교 원천관 지하에 갇혀서 동전 하나를 반복하여 던지고 있다. 준혁이는 동전이 앞면이 나오는 순간 탈출한다고 한다. 탈출하기까지 준혁이가 동전을 3번 던질 확률은?

풀이)

2. 탈출하기까지 준혁이가 동전을 던져야 하는 횟수의 평균은?

풀이)

3. 민기는 동전이 연속으로 “앞면, 뒷면”이 나오는 순간 탈출한다고 한다. 탈출하기까지 민기가 동전을 4번 던질 확률은?

풀이)

4. 탈출하기까지 민기가 동전을 던져야 하는 횟수의 평균은?

풀이)

5. 석원은 동전이 연속으로 “앞면, 뒷면, 앞면”이 나오는 순간 탈출한다고 한다.  
탈출하기까지 석원이 동전을 던져야 하는 횟수의 평균은?

풀이)